

## ÖĞRETMEN ADAYLARININ ÜÇGEN KAVRAMINA YÖNELİK KAVRAM İMAJLARININ GÖRSELLEŞTİRİLMESİNDE SOM VE WARD KÜMELEME ALGORİTMALARININ KULLANIMI

### USING SOM (SELF-ORGANIZINGMAP) COMBINED WITH WARD'S CLUSTERING ALGORITHM FOR VISUALIZATION OF TEACHER CANDIDATES' CONCEPT IMAGES ABOUT TRIANGLE CONCEPT

Doç. Dr. Cenk Keşan  
Dokuz Eylül Üniversitesi  
Buca Eğitim Fakültesi, İzmir, Türkiye  
[cenk.kesan@deu.edu.tr](mailto:cenk.kesan@deu.edu.tr)

Arş. Gör. Yusuf Erkuş  
Dokuz Eylül Üniversitesi  
Buca Eğitim Fakültesi, İzmir, Türkiye  
[yusuf.erkus@deu.edu.tr](mailto:yusuf.erkus@deu.edu.tr)

Mehmet Çağlar Coşar  
MEB, İzmir, Türkiye  
[mehmet.caglar.cosar@gmail.com](mailto:mehmet.caglar.cosar@gmail.com)

#### Özet

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bir geometrik kavramla ilişkili kavram imajlarını belirlemektir. Tall ve Vinner (1981) kavram imajını bir matematiksel düşünceye ilişkin kişinin zihnine kodlanmış olduğu zihinsel yapılar olarak tanımlamıştır. Bir bireyin bir kavrama ilişkin kavram imajı o kavramla ilişkili olan ve olmayan deneyimleri ile gelişir. Kavram imajı öğrencilerin kavrama ilişkin bilgilerini ve kavram yanılgılarını ortaya çıkarmada etkili bir yöntem olarak görülmektedir. Bu çalışma ile öğrencilerin üçgen kavramına ilişkin bilişsel yapılarını görselleştirerek modellemek için yeni bir yöntem kullanılması önerilmektedir. Çalışmada SOM (Self-OrganizingMap) ile birlikte Wardkümeleme analizi kullanılarak veriler analiz edilmiştir. SOM, yapay sinir ağlarının özel bir biçimidir ve eğitimleri sırasında gözetimsiz eğitim kullanılmaktadır. Temel olarak çok boyutlu girdilerin daha az boyuttaki çıktılara indirgenmesine dayanan çalışma mantığı problemin basitleştirilmesini amaçlayan bir boyut azaltma işlemidir. 160 öğretmen adayının yer aldığı çalışmada veri toplama aracı olarak açık uçlu soru kullanılmıştır. Öğrencilerin cevapları bir dizi işlem ile numerik verilere dönüştürülmüştür. Elde edilen veriler ViscositySOM yazılımında analiz edilmiştir. Öğrencilerin kavram imajlarına göre 4 gruba ayrıldığı görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Kavram imajı, Üçgen Kavramı, SOM, Ward kümeleme algoritması.

#### Abstract

The purpose of this study is determining the concept images of primary school mathematics teacher candidates on a geometrical concept. Tall and Vinner (1981) defined the concept image as the mental structures encoded by the person to his/her mind about a mathematical thought. The concept image of an individual for a concept develops with his/her experiences that are related and not related with that concept. The concept image is considered as an efficient method in revealing the knowledge of students on a concept and in revealing their misconceptions. With this study, the use of a new method is suggested in visualizing and modeling the cognitive structures of students on the triangle concept. The SOM (Self-Organizing Map) and Ward Cluster Analysis were used in the study to analyze the data. SOM is a specific form of artificial neural network; and during the training, non-supervised training is used. Basically, the working logic is a process that aims to simplify the problem based on reducing the multi-dimensional inputs into outputs with less size. Open-ended questions were used as data collection tools in the study in which 160 teacher candidates were included. By using the data obtained in the study, the cognitive structures of triangle concept of the teacher candidates were visualized with the SOM Method. Students' answers are transformed into numerical data by a series of operations. The data obtained is analyzed with Viscosity SOM software. It has been seen that students are divided into 4 groups according to concept images.

**Keywords:** Concept image, Concept of triangle, SOM, Ward's clustering algorithm.

## GİRİŞ

Tall ve Vinner tarafından 1981 yılında ortaya atılan kavram tanımı ve kavram imajı yapısı öğrencilerin matematiksel düşüncelerini analiz etmek için etkili bir yapı olarak görülmektedir. Kavram tanımı ve kavram imajı yapısı öğrencilerin matematiksel kavramlara ait gösterimlerini açıkça ortaya koymaktadır. Bu yüzden kavram tanımı ve kavram imajı yaklaşımlar temel alınarak yapılan birçok araştırma bulunmaktadır.

80'li yılların başında kavram imajı yapısı ilk defa öğrencilerin geometrik kavramlarını analiz eden bir çalışma eşliğinde Vinner ve Hershkowitz tarafından ortaya konulmuştur. Bu sıralarda, Tall öğrencilerin limit ve süreklilik kavramlarını öğrenirken karşılaştıkları zorlukları içeren bir çalışma yapmıştır. İki araştırmacı daha sonra ellerindeki verileri birleştirerek 1981 yılında "Limit ve Süreklilik Özel Referansı ile Kavram imajı ve Kavram tanımı" adını taşıyan ve sonraki çoğu araştırmaya kaynak teşkil edecek olan çalışmayı ortaya koymuşlardır.

"Kavram imajı" ve "kavram tanımı" terimleri, bireyin kavramsal yapısının oynadığı rolün altını çizmek için, Vinner ve Herskowitz (1980) de tanıtılmış ve sonra Tall ve Vinner (1981) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır:

"Biz kavram imajı tanımını kavramla birlikte anılan tüm bilişsel yapı olarak tanımlayacağız. Bu yapı tüm zihinsel resimleri ve çağrışım yapan özellikleri ve yöntemleri içerir. Kavram imajı geliştikçe her zaman tutarlı olması gerekmez. ... Diğer taraftan kavram tanımı bu kavramı özelleştirmek için kullanılan kelimeler bütünüdür."

Vinner (1991)' a göre, eğer bir fikir diyagramlar halinde sunulmak isteniyorsa, bilişsel yapıda iki hücreye başvurulur. Birinci hücre kavram tanımı ve ikinci hücre de kavram imajı hücresidir. İlk hücre ve hatta bazen ikisi de boş olabilir. Kavram imajı hücresi, herhangi bir anlamlandırma ile kavram ismi birleşmemişse boş olarak düşünülebilir. Kavram tanımı anlamsız bir yolla hatırlandıysa bu durum oluşabilir. Bu iki hücre arasında belli bir ilişki olmasına rağmen bu ilişki bağımsız olarak şekillendirilmiştir.

Marton ve Booth (1997), bir kavramın öğrenciler tarafından birkaç farklı yolla tecrübe edilebileceğini ifade etmektedir. Öğrencilerin bir kavramı yorumlamaları onların öğrenme kapasitelerine ve sezgilerine bağlıdır (Fischbein, 1979; Fischbein, 1987). Öğrencinin bir matematiksel kavramı benimsemesi ve öğrenmesi önceki bilgileri ve deneyimleri ile kavramın öğrenildiği durum ve ortam gibi birçok faktöre bağlıdır ve bu faktörler öğrencinin düşünmesini karakterize eder (Biza vd., 2008). Bu durum öğrencinin öğrendiği kavramı görselleştirdiği, bir sembol ile ilişkilendirdiği veya bir zihinsel model oluşturduğu anlamına gelmektedir. Tall ve Vinner(1981), öğrencilerin bir matematiksel kavrama ilişkin daima bir önyargıya sahip olduklarını belirtmektedir. Yani öğrenciler henüz formal tanımı yapmadan önce kendilerine göre bir tanıma veya imaja sahiptirler. Böylece öğrenciler bir matematiksel kavrama yönelik istenmeyen kavram imajlarına sahip olabilirler. Bu durum bazı kavram imajı ve kavram tanımı çalışmalarının öğrencilerin kavram yanılgılarını tespit etmeye yönelik yapılmasının önemli bir sebebidir.

Öğrenciler belli bir kavrama yönelik farklı anlamlar yükleyebilmektedir (Heeffer, 2007). Bingölbalive Monaghan (2007), çalışmasında mühendislik ve matematik bölümü öğrencilerinin aynı kavrama yönelik farklı kavram imajlarının olduğunu göstermiş ve bunun sebeplerini açıklamıştır. Bu durum yukarıda belirttiğimiz gibi öğrenme deneyiminin kişiye özgü yönünün olduğunu ve her öğrencinin kendi deneyimine has kavram imajına sahip olacağını göstermektedir.

Kavram imajı araştırmalarında öğrencilerin bir kavram üzerindeki düşüncelerinden ve zihin haritalarından elde edilen bilgilerle kavram imajları ortaya çıkarılmaktadır. Örneğin Nordlander

(2012), çalışmasında mühendislik öğrencilerinin Lineer Cebir dersinde öğrendikleri alt uzay kavramına ilişkin kavram imajlarını araştırmış ve kavram imajlarının 4 sınıftan oluştuğunu göstermiştir. Benzer birçok çalışmada öğrencilerin bir matematik kavramına yönelik kavram imajları sınıflar halinde belirlenmiştir. Ancak bu her öğrencinin kavram imajının bütün sınıfları içerdiği anlamına gelmemektedir. Vincent vd. (2015), analiz dersini alan 8 öğrencinin tanjant doğrusuna yönelik kavram imajlarını belirlemek amacıyla yaptığı çalışmasında öğrencilerin kavram imajlarının 6 sınıftan oluştuğunu bulmuştur. Ancak 4 öğrencinin kavram imajının 6 sınıftan 1'ine sahip olduğu diğer öğrencilerin kavram imajlarının ise 2 ya da 3 sınıftan oluştuğu ortaya çıkmıştır. Bu durumda “örneklem sayısı istatistiksel açıdan uygun bir seviyeye çıkarıldığında öğrenciler kavram imajlarına göre nasıl kümelenir?” sorusu akıllara gelmektedir. Çalışmamız bu soruya cevap aramak için şekillendirilmiştir.

Çalışmamızın amacı Geometri dersini almış olan ilköğretim matematik Öğretmenliği bölümü öğrencilerinin kavram imajlarını belirlemek ve öğrencilerin kavram imajlarına göre oluşturduğu grupları görsel hale getirip incelemektir. Öğrencileri kavram imajlarına göre gruplayabilmek için yapay sinir ağları modeli ile ortaya çıkan Öz Düzenleyici Harita olarak Türkçeye çevirebileceğimiz Self-Organizing Map(SOM, Aynı zamanda Kohonen haritası olarak da bilinir) ve Ward kümele metodu birlikte kullanılmıştır.

Nümerik verilerin analizinden elde edilen sonuçların görsel hale getirilmesi yorumlamada okuyucu için oldukça faydalı olabilmektedir. Özellikle değişkenlerin oluşturduğu kümelerin ve bunların birbiriyle olan ilişkilerinin görsel olarak sunulması, lineer ve lineer olmayan ilişkilerin görülebilmesi, varsayılan teori ile elde edilen sonuçların ilişkisinin açıkça görülmesi SOM' u diğer benzer analiz yöntemlerinden bir adım öne çıkarmaktadır (Thuneberg H., ve Hotulainen R., 2006).

### Self Organizing Map (Kohonen Map):

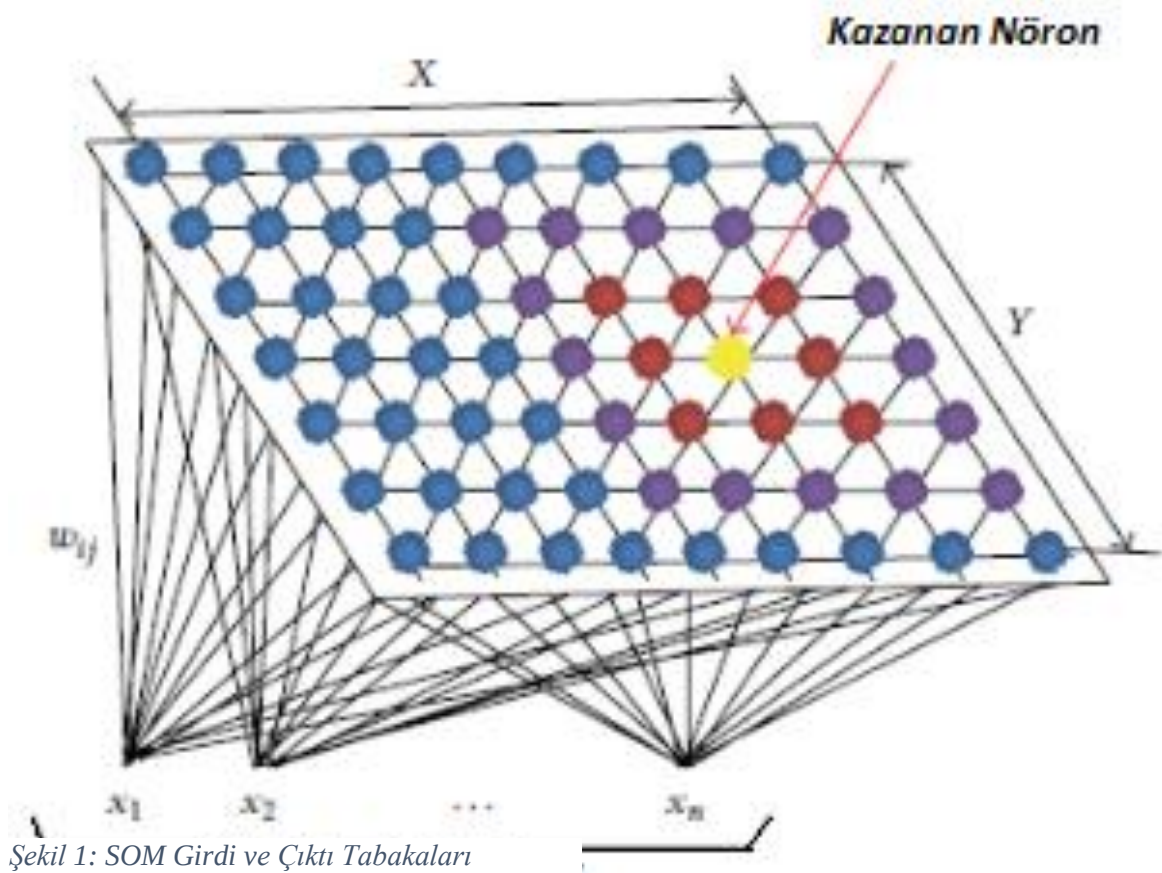
Teuvo Kohonen (1988) tarafından bulunan ve bu yüzden Kohonen Haritası olarak da bilinen SOM, yapay sinir ağları modeli olarak anılır ve bilgiyi geleneksel matematiksel yollardan farklı olarak yeni bir yolla işler. Öz düzenleyici harita olarak Türkçeye çevirebileceğimiz SOM yapay sinir ağları algoritmalarının bir çeşididir ve eğitimsiz öğrenme (unsupervised learning) mantığına dayanır. SOM'un yapısı birbiri içine geçmiş iki tabakadan oluşur. Bunlar Girdi (input) tabakası ve Kohonen tabakasıdır (Kohonen, 1995). Kohonen tabakası aynı zamanda veri setinin oluşturduğu kümelenmeyi görebileceğimiz tabakadır (Kohonen haritası).

Nöronların her biri birbirine komşuluk ilişkisiyle bağlıdır. Bu komşuluk ilişkisi haritanın yapısını belirler. Aşağıdaki formül Kohonen tabakası ile girdi tabakası arasındaki formülasyonu göstermektedir.

$$y_j = \sum_{i=1}^d w_{ji} x_i$$

Formülde  $w_{ji}$  olarak belirtilen ifade girdi tabakasındaki  $i$  ile Kohonen tabakasındaki  $j$  arasındaki bağlantının ağırlığını ifade etmektedir. Buna ağırlık vektörü de diyebiliriz.  $d$  ise değişken sayısını ifade etmektedir. Yukardaki formül ile başlayan hesaplamalar üç başlık altında toplanabilir. Bunlar rekabet, işbirliği ve adaptasyon süreci olarak açıklanmıştır (Gan, G., Ma, C. Ve Wu, J. 2007). Tüm hesaplamalardan sonra en yüksek değeri alan  $y_j$  kazanan nöron olmaktadır. Nöronlar birbirlerine komşuluk ilişkisi ile bağlı olmaktadır. Bu komşuluk ilişkisi Kohonen haritasının yapısını oluşturmaktadır. Aşağıda verilen Şekil 1, basit bir SOM'u temsil eder.

Yukarıdaki şekilde 9x7 nöronun olduğu görülmektedir. x'ler giriş vektörlerini temsil etmektedir.



Şekilde n tane değişkenin olduğu görülmektedir. Ağırlık vektörü  $w$  ile temsil edilir ve her değişkenden nörona bir ağırlık vektörü tanımlanır. Sarı renkli nöron kazanan nöronu ifade etmektedir. Etrafındaki kırmızı renkli nöronlar ise bu nöronun komşuları olmaktadır.

### SOM-Ward Kümeleme Algoritması

Ward kümeleme yöntemi hiyerarşik yığılmalı kümeleme algoritmasını kullanır (Ward, J. H. 1963). Ward algoritmasına göre başlangıçta her hücre bir küme olarak kabul edilir. Daha sonra birbirine yakın mesafede olan kümeler birleştirilerek yeni bir küme oluştururlar. Bu işlem en az sayıda küme kalana kadar devam eder (Vesanto, J. ve Alhoniemi, E., 2000).

SOM-Ward kümeleme yönteminde mesafenin hesaplanmasında hem SOM hem de Ward algoritmaları kullanılır. İlk olarak her hücre ayrı bir küme olarak kabul edilir. Daha sonra algoritmanın her aşamasında hücreler, arasındaki mesafeye göre birbirine yaklaşılarak yeni kümeler oluşturulur. Bu algorithma oluşan küme sayısı en az olana kadar devam edilir. Buraya kadar anlatılan Ward algoritması ile yapılan işlemlerin sonucunda elde edilir. Yani Ward algoritması ile minimum sayıda küme oluşturulurken SOM algoritması ile yapılan işlemlerde nöronlar arasındaki komşuluk ilişkileri belirlenmiş olur. Bu komşuluk ilişkisi siyah-beyaz renklerle gösterildiğinde siyah renk en güçlü ilişkiyi, renkli olarak gösterildiğinde ise kırmızı renk en güçlü ilişkiyi açıklamaya yaramaktadır.



## YÖNTEM

Verilerin toplanmasında yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Bu form ile öğrencilerden aşağıdaki soruyu cevaplamaları istenmiştir:

“Üçgen kavramını düşündüğünüzde aklınıza gelen veya zihninizde görüntülenen ilk 10 şey nedir? Sırasıyla yazınız.”

Literatürü incelediğimizde kavram imajı belirlemeye yönelik örnekleme yöneltlen sorular genellikle “.....” kavramını nasıl tanımlarsın ya da “.....” çeşitleri hakkında ne biliyorsun şeklinde sorulmaktadır. Bu çalışmada ise öğrencilerin kavram imajlarının belirlenebilmesi için akıllarına gelen 10 şeyin yazılması istenmiştir. Çalışmada İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde 1. ve 2. sınıfta öğrenim görmekte olan ve Geometri dersini almış olan 160 adet öğretmen adayından veri toplanmıştır. 12 öğretmen adayından elde edilen verilerde kayıp/hata olmasından dolayı kalan 148 öğretmen adayından elde edilen veriler analiz edilmiştir. Verilerin analizinde SOM ve Ward kümeleme yöntemini bir arada kullanmamıza olanak veren ViscositySOMine programı kullanılmıştır.

Öğrencilerin kavram imajları kavramla ilgili olan ya da olmayan ifadeleri içermektedir (Vinner ve Herskowitz, 1980). Bu ifadelerden öğrencilerin aklına ilk gelenler ile son gelenler bize kavram imajlarının içerdiği sınıfların güçlü ve zayıf olanlarını belirlemede yardımcı olması bakımından önemlidir. Bu yüzden öğrencilerden üçgen kavramı ile ilgili ilk düşündüklerinden başlayarak 10 adet cevap yazmaları istenmiştir. Elde edilen veriler 3 araştırmacı tarafından analiz edilerek 5 tema altında toplanmıştır. Aşağıdaki tabloda her bir temanın ismi ve açıklaması yer almaktadır.

*Tablo 1: Temalar ve Açıklamaları*

| Kodlar | Temalar                                    | Açıklama                                                                                                                          |
|--------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Üçgenin elemanları, özellikleri, çeşitleri | Bu grupta üçgeni oluşturan elemanlar, matematiksel ifadeler, üçgenin özellikleri ve çeşitleri ile ilgili ifadeler yer almaktadır. |
| 2      | Günlük Hayat                               | Üçgenin şekli veya başka bir özelliği ile günlük hayat bağlamında ilişki kurulan ifadeler                                         |
| 3      | Tanım, Teorem                              | Üçgenle ilgili olan teoremler ve üçgeni tanımlamaya yönelik ifadeler                                                              |
| 4      | Diğer Şekiller                             | Üçgen dışında kalan diğer geometrik şekiller                                                                                      |
| 5      | Konu alanları                              | Bu grupta öğrencilerin üçgen ile özdeşleştirdikleri konu alanları yer almaktadır                                                  |

Aşağıdaki tabloda bu temaların öğrencilerin verdiği hangi cevapları kapsadığı görülmektedir.

*Tablo 2: Temaların İçerdiği Örnekler*

| 1                   | 2              | 3                  | 4               | 5            |
|---------------------|----------------|--------------------|-----------------|--------------|
| 180°                | Kolye          | Stewart Teoremi    | Kare            | Origami      |
| Üç açı              | İllüminati     | MenalausTeo.       | Dikdörtgen      | Denklemler   |
| Üç kenar            | Peynir         | «Doğrusal olmayan  | Prizma          | Trigonometri |
| Üç nokta            | Evlerin çatısı | üç noktanın ikişer | Piramit         | Matematik    |
| Açıortay kenarortay | Kalem ucu      | ikişer             | Daire           | Sayılar      |
| Yükseklik           | Üçgen Şekli    | birleştirilmesiyle | Çember          |              |
| Alan                | Çalgı aleti    | oluşan şekil»      | İç teğet Çember |              |
| Çevre               |                | Tanım              |                 |              |
| Doğru               |                | Teorem(ler)        |                 |              |
| Doğru Parçası       |                |                    |                 |              |

Yukardaki tablonun oluşmasının ardından öğrencilerin verdikleri cevaplar temalara göre kodlanarak aşağıdaki tablo elde edilmiştir.

*Tablo 3: Öğrencilerin Cevaplarının Temalara Göre Kodlanması*

| Öğrenci | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> | S <sub>6</sub> | S <sub>7</sub> | S <sub>8</sub> | S <sub>9</sub> | S <sub>10</sub> |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| Ö76     | 1              | 1              | 4              | 2              | 2              | 1              | 2              | 2              | 5              | 1               |
| Ö77     | 4              | 2              | 5              | 2              | 2              | 4              | 2              | 2              | 1              | 2               |
| Ö78     | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              | 3              | 3              | 2              | 1              | 5               |
| Ö79     | 1              | 5              | 2              | 1              | 1              | 2              | 1              | 3              | 1              | 1               |
| Ö80     | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              | 2              | 2              | 3              | 3               |

Yukardaki tabloda 1 ve 5 arasında değişen rakamların şimdilik matematiksel olarak bir değeri olmayıp sadece öğrencinin verdiği cevabın hangi temada yer aldığını göstermektedir. Matematiksel olarak bir anlam ifade etmesi için her grubun sıra ortalaması alınarak aşağıdaki tablo oluşturulmuştur.

*Tablo 4: Temaların Öğrencilere Göre Ağırlıkları*

| Öğrenciler | Üçgenin Elemanları | Günlük Hayat   | Tanım, Teorem  | Diğer Şekiller | Konu Alanları  |
|------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|            | X <sub>1</sub>     | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> |
| Ö76        | 4,75               | 6              | 0              | 3              | 9              |
| Ö77        | 9                  | 6              | 0              | 3,5            | 3              |
| Ö78        | 4                  | 8              | 6,5            | 0              | 10             |
| Ö79        | 6                  | 4,5            | 8              | 0              | 2              |
| Ö80        | 3,5                | 7,5            | 9,5            | 0              | 0              |

Sıra ortalamaları hazırlanırken her tema sırayla incelenmiş ve hangi sıralarda bulunuyorsa toplanmıştır. Ardından elde edilen toplam satırda bu temadan kaç adet bulunuyorsa sayılarak bu sayıya bölünmüş ve yukardaki tablo elde edilmiştir. Örneğin Tablo 3’de 78 numaralı öğrencinin sıra ortalamasını hesaplarken ilk olarak 1 numaralı tema aranmıştır. 1 numaralı tema sırasıyla 1., 2., 3., 4., 5. ve 9. Sırada yer almaktadır. Bu yüzden sıra ortalaması  $1+2+3+4+5+9=24$ ,  $24/6=4$  olarak hesaplanır ve Tablo 4’e yazılır. 4 numaralı temadan hiçbir cevap olmadığı için 0 yazılmıştır. Öğrenci 5 numaralı temadan sadece 10. Sırada yazmıştır. Bu yüzden bu temanın altında 10 rakamı yer almaktadır. Verilerin SOM-Ward kümeleme analizine uygun hale getirilmesi için 1 rakamının en düşük ilişkiyi ve 10 rakamının ise en yüksek ilişkiyi gösterecek şekilde düzenlenmesi gerekmektedir. Ancak 78 numaralı öğrencinin verileri incelendiğinde 5 numaralı tema sadece 1 adet olarak en son sırada yer almıştır. Hesaplamaya göre Tablo 4’de 10 değerini almıştır. Bu hesaplamada aynı zamanda öğrencilerin ilk sırada verdikleri cevapların son sırada verilen cevaptan daha yüksek değere sahip olması gerektiğinden bütün veriler 11’den çıkarılarak aşağıdaki tablo oluşturulmuştur.

*Tablo 5: SOM-Ward Kümeleme Analizine Hazır Olan Giriş Verileri*

| Öğrenciler | Üçgenin Elemanları | Günlük Hayat   | Tanım, Teorem  | Diğer Şekiller | Konu Alanları  |
|------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|            | X <sub>1</sub>     | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> |
| Ö76        | 6,25               | 5              | 0              | 8              | 2              |
| Ö77        | 2                  | 5              | 0              | 7,5            | 8              |
| Ö78        | 7                  | 3              | 4,5            | 0              | 1              |
| Ö79        | 5                  | 6,5            | 3              | 0              | 9              |
| Ö80        | 7,5                | 3,5            | 1,5            | 0              | 0              |

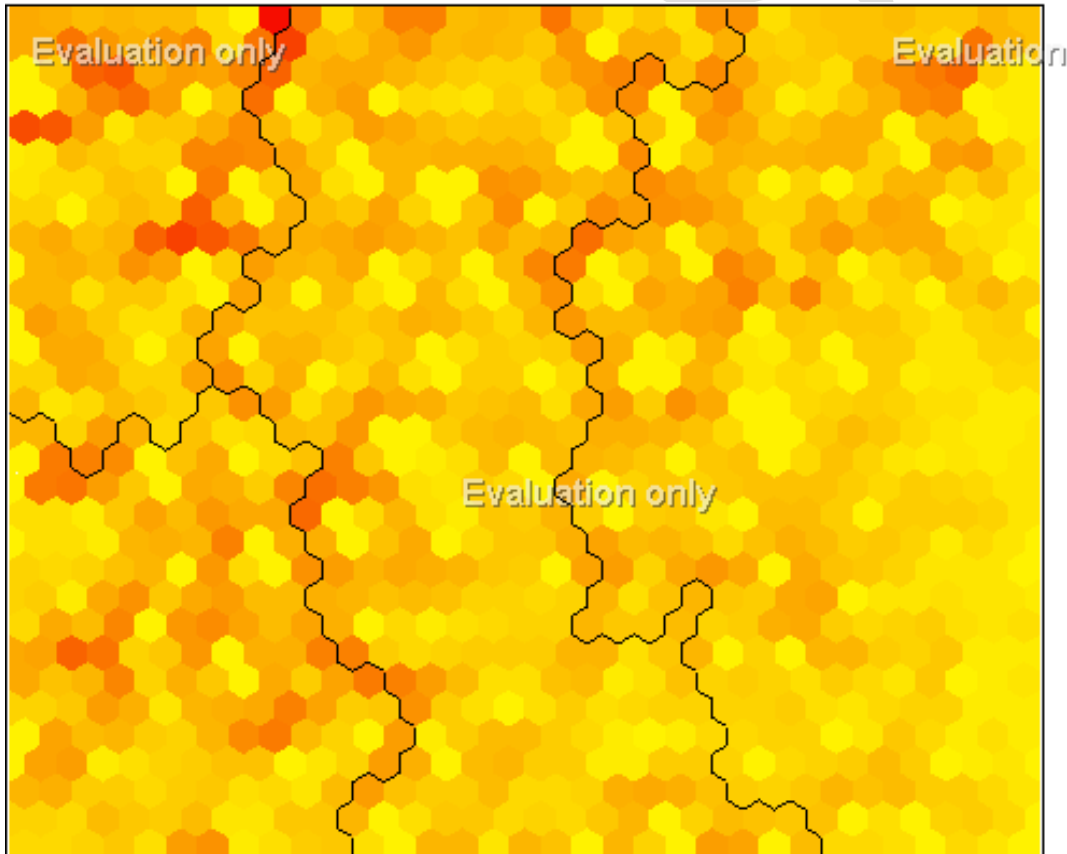
Tablo 5’in hazırlanması ile veriler artık analiz için ViscositySOMine programına girilmeye hazır hale gelmiştir. ViscositySOMine programında hiyerarşik kümeleme algoritması ve SOM birlikte kullanılır ve ortaya çıkan haritaların yorumlanması daha kolay hale gelir.

## BULGULAR

Öğrencilerin üçgen kavramına ilişkin verdikleri 10 cevap incelendiğinde öğrencilerinin %42'sinin "Üçgenin Elemanları" temasından, %24'ünün "Günlük Hayat" temasından, %15'inin Tanım-Teorem temasından, %11'inin Diğer Şekiller temasından, %8'inin ise Konu Alanları temasından cevap verdiği görülmektedir.

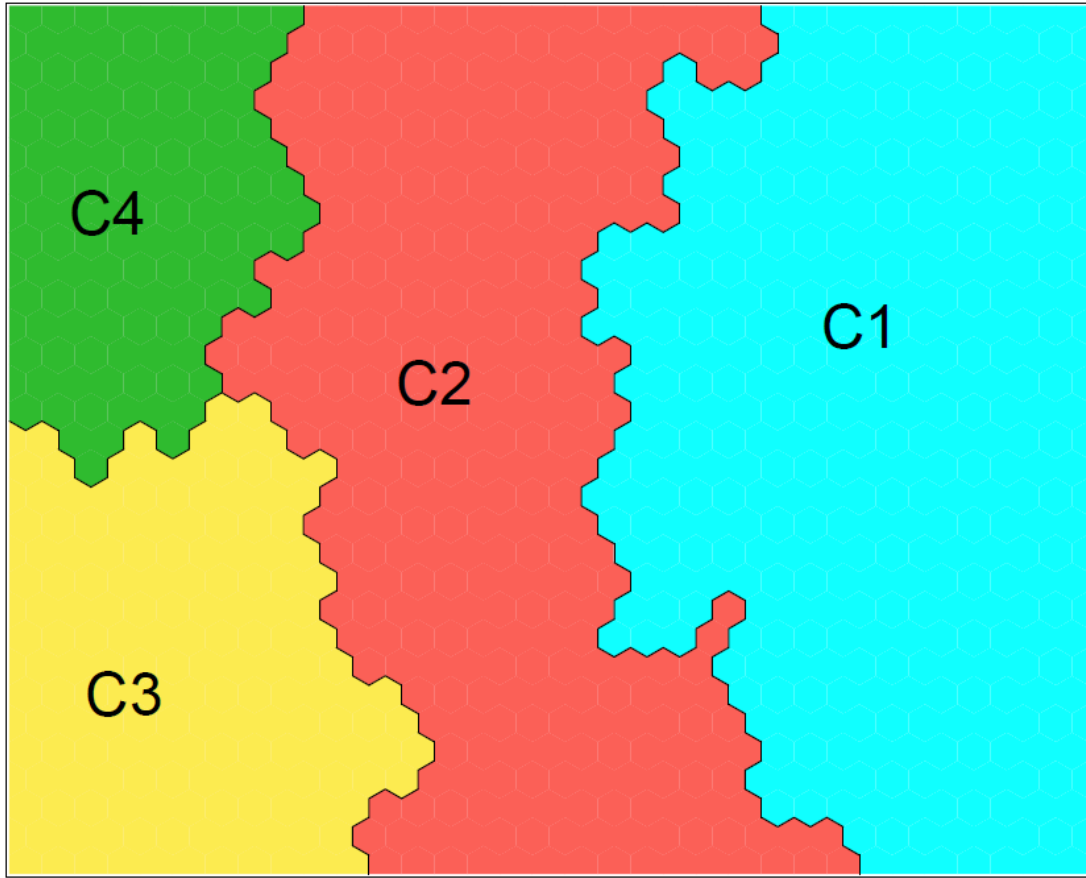
Bu durum öğretmen adaylarının üçgen kavramına ilişkin kavram imajlarının üçgenin elemanları olarak isimlendirilmiş olan temadan ve günlük hayat temasından oldukça etkilendiği görülmektedir. Örneklemin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümündeki öğretmen adaylarından seçilmiş olması üçgenin elemanları temasının ağırlıklı olarak verilen cevaplar arasında yer almasına sebep olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplarda öne çıkan günlük hayat temasının en çok verilen ikinci cevap olması öğretmen adaylarının matematiksel kavramları günlük hayatla sıkı bir şekilde bağdaştırdıklarını göstermektedir.

ViscoverySOMine programından elde edilen veriler incelendiğinde öğretmen adaylarının üçgen kavramına ilişkin bilişsel yapılarının 4 kümeye ayrıldığı görülmüştür. Nöronların trainingaşamasında birbirleriyle ne ölçüde rekabet ettiğini belirleyen parametreye gerilim parametresi denmektedir. Gerilim parametresi 0.3 ile 2 arasında değerler almaktadır. Bu çalışmada gerilim parametresi 0.5 bulunmuştur.



Şekil 2: U-Matrisi

Ward yığılmalı hiyerarşik kümeleme algoritmasının ve SOM'un birlikte kullanılmasıyla oluşan şekillerden biri U-matrisidir. U-matrisi sonucunda verilerin kaç kümeye ayrılacağı belirlenmiş olur. Aşağıdaki şekilde ise nöronların eğitimleri sonrasında oluşan harita görülmektedir.



Şekil 3: Nöronların Eğitimi Sonrası Oluşan SOM-Ward Kümeleri

Şekil 2’de koyu renkler nöronlar arasındaki ilişkinin zayıf olduğu yerleri, açık renkler ise ilişkinin kuvvetli olduğu ve nöronların yığıldığı yerleri göstermektedir. Bu bakımından program ilişkinin zayıfladığı yerlerde bir sınır belirleyerek kümelerin oluşturulması mantığına dayanarak çalışmaktadır.

Şekil 3’de oluşan kümelerin büyüklükleri ve temaların bu kümelere olan etkileri Tablo 6’da verilmiştir. Kohonen tabakası 4 kümeye ayrılmıştır. Bu kümelere hangi temanın ne kadar etki ettiği 0-10 arasında değişen bir parametre ile belirlenmektedir. Bu parametre değeri 10’a doğru yaklaştıkça kümeye olan etkisi artmaktadır. Bu parametreler kümelerin medyan değerini vermekte olup aşağıdaki tabloda görülmektedir:

Tablo 6: Kümelerle İlgili İstatistiksel Bilgiler

| Kümeler | Yüzdelik | Üçgenin Elemanları | Günlük Hayat | Tanım, Teorem | Diğer Şekiller | Konu Alanları |
|---------|----------|--------------------|--------------|---------------|----------------|---------------|
| C1      | 42,57%   | 6,00               | 1,131        | 5,87          | 1,81           | 0,77          |
| C2      | 27,03%   | 6,37               | 5,441        | 2,24          | 4,42           | 0,81          |
| C3      | 17,57%   | 6,47               | 3,522        | 1,55          | 1,33           | 7,52          |
| C4      | 12,84%   | 1,70               | 5,507        | 1,77          | 6,98           | 5,50          |

**C1 Kümesi:** Öğretmen adaylarının %42’si C1 kümesi içinde yer almaktadır. Bu kümenin içinde yer alan öğrenciler daha çok “Üçgenin Elemanları” ve “Tanım-Teorem” temalarını verdikleri cevaplarda ilk sıralarda yazmışlardır.

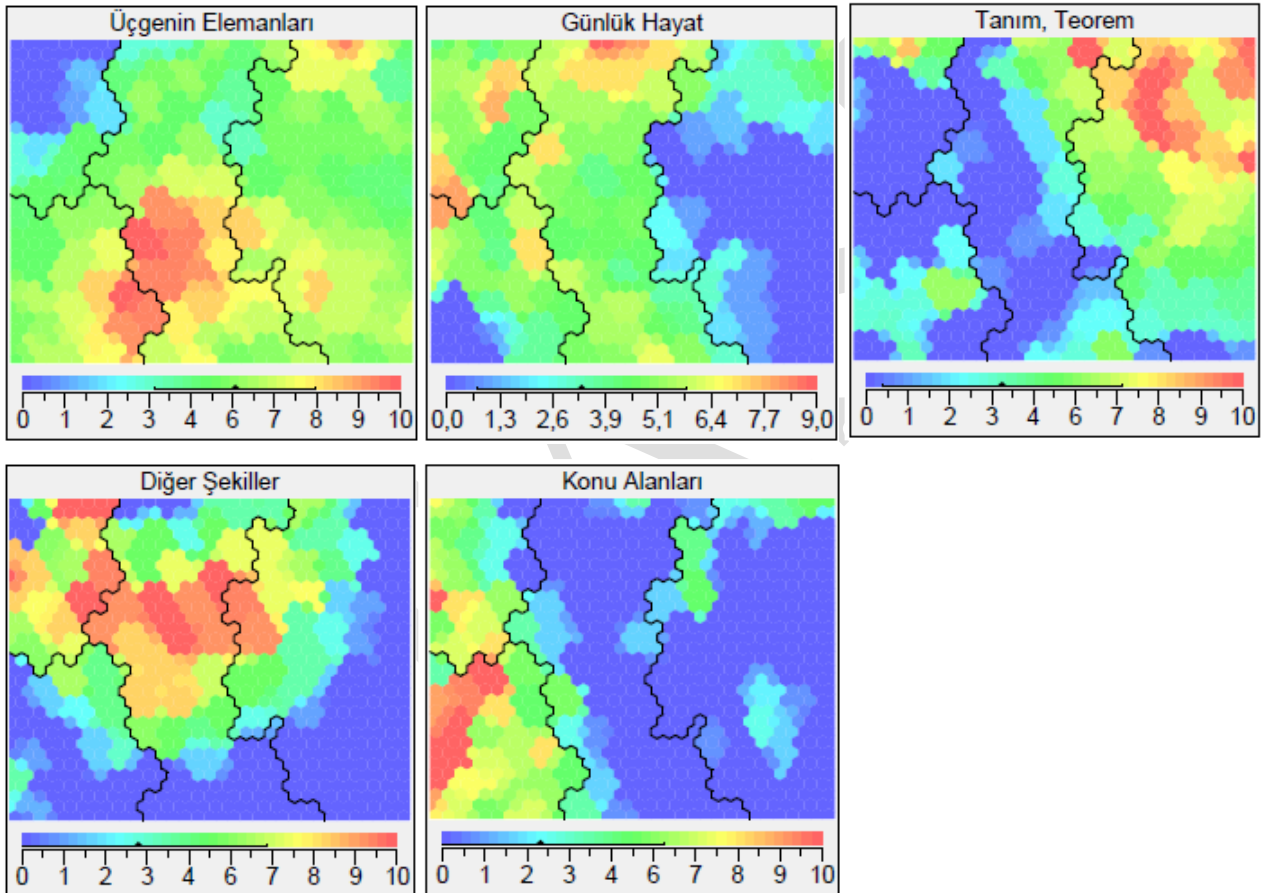
**C2 Kümesi:** Öğretmen adaylarının %27’si bu küme içinde yer almıştır. Bu kümeyi etkileyen başlıca temalar ise sırasıyla “Üçgenin Elemanları”, “Günlük Hayat” ve “Diğer Şekillerdir”.



**C3 Kümesi:** Öğretmen adaylarının %17,5 i bu küme içinde yer almıştır. Bu kümeyi etkileyen başlıca temalar sırasıyla konu alanları ve üçgenin elemanlarıdır.

**C4 Kümesi:** Öğretmen adaylarının yaklaşık %13'ü bu küme içinde yer almıştır. Bu kümedeki öğrenciler Diğer Şekiller, Günlük Hayat ve Konu Alanları temalarından etkilenmiştir. Bu öğrencilerin üçgenleri diğer geometrik şekillerle, günlük hayattan somut ya da soyut kavramlarla ve geometriden farklı konularla ilişkilendirdikleri görülmektedir.

Aşağıdaki şekilde SOM-Ward Kümelemesi sonucu oluşan 4 kümeye 5 temanın dağılımı görülmektedir.



Şekil 4: Öğrencilerin Temalara Göre Dağılımı

Şekil 4'te renkli ölçeklendirme yardımıyla her temanın kümelere olan katkısı görselleştirilmiştir. Koyu mavi olan renk ilişkinin olmadığı "0" rakamını temsil ederken koyu kırmızı ise ilişkinin kuvvetli olduğu "10" değerini ifade etmektedir. Örneğin Şekil 5'teki 1. Harita Üçgenin Elemanları temasının kümelere olan katkısını göstermektedir. Bu haritaya göre Üçgenin Elemanları temasını daha çok C1, C2 ve C3 kümelerine etki ettiği ve kavram imajının neredeyse tamamını kapladığı, C2 ve C3 kümelerinin belirli bölgelerinde kırmızı rengi aldığı ve bu kırmızı bölgelerde öğrenciler tarafından verilen ilk cevaplar arasında yer aldığı görülmektedir. Ayrıca Bu temanın altındaki ölçeğe bakılarak tüm öğrenciler arasında ortalamasının 6'ya yakın bir değer olduğu görülmektedir. Öğrenciler arasında

Şekil 5'de yer alan 5. Haritaya baktığımızda ise 5. tema olan "Konu Alanları" temasının 3. Ve 4. Kümeye etki ettiği görülmektedir. Özellikle 3. kümede kırmızı ve sarı renklerin sık bir şekilde yer alması bu bölgede yer alan öğrencilerin ilk cevapları arasında yer aldığını göstermektedir.

Aşağıdaki tabloda temalar arasındaki korelasyon katsayıları verilmiştir. Temalar arasında anlamlı bir ilişkinin olmaması lineer bağımsız olduklarını göstermektedir.

Tablo 7: Temalar Arasındaki Korelasyon Katsayıları

| 1. Değişken        | 2. Değişken        | Korelasyon |
|--------------------|--------------------|------------|
| Günlük Hayat       | Diğer Şekiller     | -0,1276    |
| Konu Alanları      | Diğer Şekiller     | -0,2566    |
| Tanım-Teorem       | Diğer Şekiller     | -0,0359    |
| Üçgenin Elemanları | Diğer Şekiller     | 0,1842     |
| Diğer Şekiller     | Günlük Hayat       | -0,1276    |
| Konu Alanları      | Günlük Hayat       | -0,1048    |
| Tanım-Teorem       | Günlük Hayat       | -0,3042    |
| Üçgenin Elemanları | Günlük Hayat       | 0,0682     |
| Diğer Şekiller     | Konu Alanları      | -0,2566    |
| Günlük Hayat       | Konu Alanları      | -0,1048    |
| Tanım-Teorem       | Konu Alanları      | -0,2253    |
| Üçgenin Elemanları | Konu Alanları      | 0,3313     |
| Diğer Şekiller     | Tanım-Teorem       | -0,0359    |
| Günlük Hayat       | Tanım-Teorem       | -0,3042    |
| Konu Alanları      | Tanım-Teorem       | -0,2253    |
| Üçgenin Elemanları | Tanım-Teorem       | -0,5086    |
| Diğer Şekiller     | Üçgenin Elemanları | 0,1842     |
| Günlük Hayat       | Üçgenin Elemanları | 0,0682     |
| Konu Alanları      | Üçgenin Elemanları | 0,3313     |
| Tanım-Teorem       | Üçgenin Elemanları | -0,5086    |

## SONUÇ VE ÖNERİLER

Öğretmen adaylarının üçgen kavramına yönelik kavram imajları üç araştırmacı tarafından incelenmiş ve 5 sınıfa ayrıldığı görülmüştür. Yapılan istatistiksel analizlerde bu sınıfların birbiri ile korelasyonel ilişkisi olmadığı ve birbirinden lineer bağımsız olduğu anlaşılmıştır. Öğrencilerin kavram imajlarına göre 4 kümeye ayrıldığı görülmüştür. Bu durum aynı kümedeki öğrencilerin kavram imajlarına göre ortak özellikler taşıdığı anlamına gelmektedir. Örneğin Şekil 4'te Tanım-Teorem temasına baktığımızda C1 kümesindeki öğretmen adaylarının üçgen kavramına ilişkin ilk akıllarına gelenin üçgenin tanımı ya da üçgenle ilgili bir teorem olduğu göze çarpmaktadır. Çalışmanın literatürü destekleyen sonuçlarından biri öğretmen adaylarının kavram imajlarında kavram ile ilgili olan ve doğrudan ilgili olmayan birçok şeyin olmasıdır. Tall ve Vinner (1981), kavram imajının kavramla ilişkilendirilen her şeyi kapsadığını belirtmiştir. Bunlara Günlük Hayat teması içinde yer verilmiştir. Aslında bu temada verilen tüm cevaplar bir yönü ile üçgen ile ilişkilendirilmiştir. Ancak kavramla doğrudan ilişkili değildir.

Literatürde yer alan az sayıda örnekleme yapılan nitel çalışmalarla bu çalışmadan elde edilen sonuçlara ulaşılması beklenemez. Bu yüzden örneklem sayısının uygun seviyede olduğu ve örneklemden elde edilen verilerin çeşitlendirildiği çalışmalarla daha önemli sonuçlara ulaşılabilir.

## KAYNAKLAR

- Bingolbali E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited, *Educ. Stud. Math.* 68(1),19–35.
- Biza, I., Christou, C.&Zachariades, T. (2008).Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis, *Res. Math. Educ.* 10(1), 53–70.
- Fischbein, E. (2007). *Intuitions in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Reidel, Dordrecht, The Netherlands.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979).The intuition of infinity, *Educ. Stud.Math.* 10(1), 3–40.

- Gan, G., Ma, C., & Wu, J. (2007). *Data Clustering Theory, Algorithms, and Applications*, American Statistical Association, Philadelphia, Pa, USA.
- Heeffer, A. (2007). *Learning concepts through the history of mathematics: The case of symbolic algebra*, in *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*, K. Francis and J. P. VanBendegem, eds., Springer, New York, pp. 83–103.
- Kohonen, T. (1988). *Self-organization and associative memory* (New York, Springer-Verlag).
- Kohonen, T. (1995). *Self-Organization Maps*, Springer, Berlin, Germany
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ
- Nordlander, M.C. & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(5), 627-641,
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to Limits and Continuity, *Educ. Stud. Math.*, 12, 151–169.
- Thuneberg, H., & Hotulainen, R. (2006). Contributions of data mining for psycho-educational research: what self-organizing maps tell us about the well-being of gifted learners, *High Ability Studies*, 17(1), 87-100
- Vesanto, J., & Alhoniemi, E. (2000). Clustering of the self-organizing map, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11(3), 586–600
- Vincent, B., Larue, R., Sealey, V., & Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(5), 641-657
- Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Springer, Netherlands.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts, *Proceedings of the 4th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, R. Karplus, ed., Berkeley, CA, vol. 1, pp. 177–184.
- Ward, J. H. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function, *Journal of the American Statistical Association*, 58, 236–244

### Extended Abstract

In studies on concept image, it has been frequently investigated that concept images are divided into certain classes. In his work with 8 students who took the analysis course, Vincent et al (2015) found that students' concept images were formed in 6 classes. However, it turns out that four students' concept image is composed of 1 out of 6 classes, and the other students' concept images have 2 or 3 classes. In this case, "How is the student clustered according to concept images when the number of samples is increased to a statistically appropriate level?" question comes to mind. Our work has been shaped around this question. The purpose of this study is determining the concept images of primary school mathematics teacher candidates on a geometrical concept. Tall and Vinner (1989) defined the concept image as the mental structures encoded by the person to his/her mind about a mathematical thought. The concept image of an individual for a concept develops with his/her experiences that are related and not related with that concept. The concept image is considered as an efficient method in revealing the knowledge of students on a concept and in revealing their misconceptions. With this study, the use of a new method is suggested in visualizing and modeling the cognitive structures of students on the triangle concept. The SOM (Self-Organizing Map) and Ward Cluster Analysis were used in the study to analyze the data. SOM is a specific form of artificial neural network; and during the training, non-supervised training is used. Basically, the working logic is a process that aims to simplify the problem based on reducing the multi-dimensional inputs into outputs with less size. Open-ended questions were used as data collection tools in the study in which 160 teacher candidates were included. By using the data obtained in the study, the cognitive structures of triangle concept of the teacher candidates were visualized with the SOM Method. Students' answers are transformed into numerical data by a series of operations. The data obtained is analyzed with Viscovery SOMine software. It has been seen that students are divided into 4 groups according to concept images.

According to the results, the students in the same cluster seem to have similar concept images. In this study, students were divided into groups according to their concept images and the qualitative data was visualized with a new method.

IJTASE